

# IX олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

## МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР

Таллинн, 27 ноября 2012 года

XI класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найди все действительные корни дробного уравнения

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$$

и выполни проверку одного из корней, выбранного наугад.

2. Дано 2012 целых чисел. Известно, что сумма произвольно выбранных среди них 2011 чисел делится нацело на 2012. Доказать, что все данные числа делятся нацело на 2012.

3. Центр окружности расположен на прямой, заданной уравнением  $y = x$ . Окружность проходит через точки с координатами  $(5;0)$  и  $(1;8)$ . Составь уравнение окружности и выполни чертеж.

4. Две окружности с радиусами  $\frac{r}{2}$  и  $r$  внешне касаются друг друга. Из центра меньшей окружности проведен отрезок длиной  $3r$ , который образует с отрезком, соединяющим центры данных окружностей, угол  $30^\circ$ . Какая часть проведенного отрезка лежит вне обоих кругов, ограниченных данными окружностями?

5. В кругу сидят 25 человек, причём каждый из них либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Известно, что среди двух соседей каждого лжеца есть ровно один лжец. При опросе выяснилось следующее:

8 человек ответили, что рядом с ними сидит точно один лжец,

остальные ответили, что оба соседа лжецы. Сколько лжецов сидит в кругу?